

INTEGRALI

INTEGRALE INDEFINITO

Nello studio del calcolo differenziale si è visto come si può associare ad una funzione la sua derivata.

Il calcolo integrale si occupa del problema inverso: data una funzione $f(x)$ è possibile determinare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$?

Una funzione $F(x)$ con questa proprietà si dice **primitiva di f**.

DEF. Una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a; b]$ e la sua derivata è $f(x)$.

Quindi: se $F'(x) = f(x)$ allora $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

DA RICORDARE

- La derivata di una funzione quando esiste è **UNICA**.
- Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora lo sono anche tutte le funzioni del tipo

$$F(x) + C \quad \text{con } C \text{ costante reale arbitraria.}$$

Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla, si ha:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Definizione algebrica di integrale

Si definisce **integrale indefinito** della funzione $f(x)$, e si indica con $\int f(x) dx$, l'insieme di tutte le primitive $F(x) + C$ di $f(x)$ con C numero reale qualunque.

Nella scrittura $\int f(x) dx$ la funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e la variabile x **variabile d'integrazione**.

Esistono le seguenti:

Proprietà di linearità

- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
- $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$
- $\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)] dx = k_1 \cdot \int f_1(x) dx + k_2 \cdot \int f_2(x) dx$

Tali proprietà permettono di affermare che l'integrale indefinito, come la derivata, è un **operatore lineare** e il procedimento di integrazione che utilizza tali proprietà è detto **integrazione per scomposizione**.

INTEGRALI

Se è possibile determinare l'integrale indefinito di una funzione grazie alle sole regole di derivazione allora l'integrale è detto **immediato**.

Tabella degli integrali immediati delle funzioni elementari e loro generalizzazioni

Integrale immediato
$\int dx = x + C$
$\int kdx = kx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$

Calcolo di un integrale indefinito

Vediamo ora come procedere per calcolare un integrale indefinito

- Come prima cosa devi vedere se l'integrale e' immediato, cioè se è compreso nella tabella degli integrali immediati o è riconducibile ad essi
- Se l'integrale non e' immediato devi vedere se si può risolvere mediante il metodo di scomposizione applicando le proprietà di linearità

Vediamo ora di capire con qualche esempio.

➤ Integrazioni immediate con utilizzo della regola di integrazione per scomposizione.

$$1. \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = 3 \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx = 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + \log|x| + C = x^3 + \log|x| + C$$

$$2. \int (4\sqrt{x} + 2x^4 + 1) dx = 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^4 dx + \int dx = 4 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2 \frac{x^{4+1}}{4+1} + x + C =$$

$$4 \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} + 2 \frac{x^5}{5} + x + C = \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{2}{5} x^5 + x + C.$$