INTEGRALI

INTEGRALE INDEFINITO

Nello studio del calcolo differenziale si è visto come si può associare ad una funzione la sua derivata.

Il calcolo integrale si occupa del problema inverso: data una funzione $f(x)$ è possibile determinare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x)=f(x)$?

Una funzione $F(x)$ con questa proprietà si dice **primitiva di f**.

DEF. Una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a;b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a;b]$ e la sua derivata è $f(x)$.

Quindi: se $F'(x)=f(x)$ allora $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

DA RICORDARE

- La derivata di una funzione quando esiste è **UNICA**.
- Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora lo sono anche tutte le funzioni del tipo

  $F(x)+C$ con C costante reale arbitraria.

  Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla, si ha:

  $$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x) \qquad \forall C \in \Re$$

Definizione algebrica di integrale

Si definisce **integrale indefinito** della funzione $f(x)$, e si indica con $\int f(x)dx$, l'insieme di tutte le primitive $F(x)+C$ di $f(x)$ con C numero reale qualunque.

Nella scrittura $\int f(x)dx$ la funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e la variabile x **variabile d'integrazione**.

Esistono le seguenti:

Proprietà di linearità

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
- $\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
- $\int [k_1 \cdot f_1(x)+k_2 \cdot f_2(x)]dx = k_1 \cdot \int f_1(x)dx + k_2 \cdot \int f_2(x)dx$

Tali proprietà permettono di affermare che l'integrale indefinito, come la derivata, è un **operatore lineare** e il procedimento di integrazione che utilizza tali proprietà è detto **integrazione per scomposizione**.

INTEGRALI

Se è possibile determinare l'integrale indefinito di una funzione grazie alle sole regole di derivazione allora l'**integrale** è detto **immediato**.

Tabella degli integrali immediati delle funzioni elementari e loro generalizzazioni

Integrale immediato
$\int dx = x + C$
$\int k dx = kx + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + C$

<u>Calcolo di un integrale indefinito</u>

Vediamo ora come procedere per calcolare un integrale indefinito

- Come prima cosa devi vedere se l'integrale e' immediato, cioè se è compreso nella tabella degli integrali immediati o è riconducibile ad essi
- Se l'integrale non e' immediato devi vedere se si può risolvere mediante il metodo di scomposizione applicando le proprietà di linearità

Vediamo ora di capire con qualche esempio.

- **<u>Integrazioni immediate con utilizzo della regola di integrazione per scomposizione.</u>**

1. $$\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)dx = 3\int x^2 dx + \int \frac{1}{x}dx = 3\,\frac{x^{2+1}}{2+1} + log\lvert x\rvert + C = x^3 + log\lvert x\rvert + C$$

2. $$\int\left(4\sqrt{x}+2x^4+1\right)dx = 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^4 dx + \int dx = 4\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + x + C =$$

$$4\,\frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} + 2\,\frac{x^5}{5} + x + C = \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^5 + x + C\,.$$