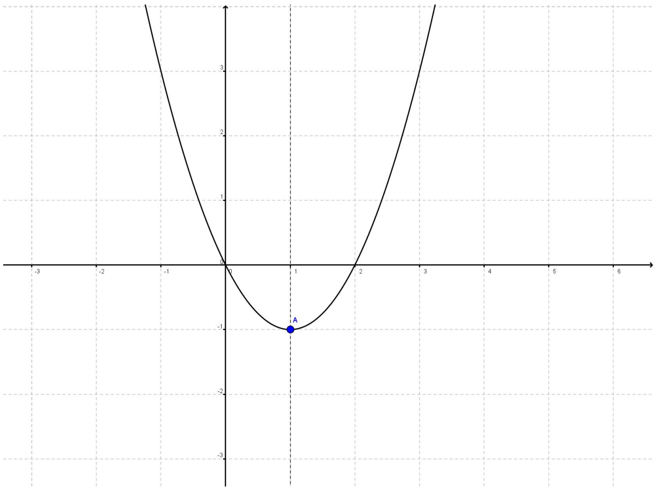
FUNZIONI CONTINUE E DISCONTINUE

ESEMPIO 1 - Consideriamo la funzione f(x) = $x^2 - 2x$ **e calcoliamo f(1) e** $\lim_{x \to 1} f(x)$**:**

- ⇒ f(1) = $1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
- ⇒ $\lim_{x \to 1} x^2 - 2x = 1 - 2 = -1$

Possiamo osservare che f(1) = $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

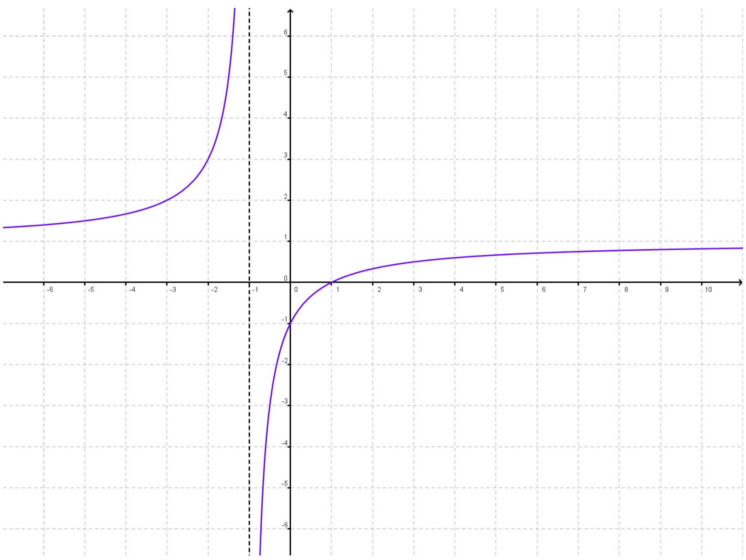


QUESTO PERO' NON SEMPRE SUCCEDE. FACCIAMO ALTRI ESEMPI.

ESEMPIO 2 - Consideriamo ora la funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **e calcoliamo f(-1) e** $\lim_{x \to -1} f(x)$**:**

- ⇒ f(-1) non si può calcolare perché x=-1 non appartiene al dominio della funzione
- ⇒ $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

Allora possiamo osservare che le due condizioni non sono uguali!!!



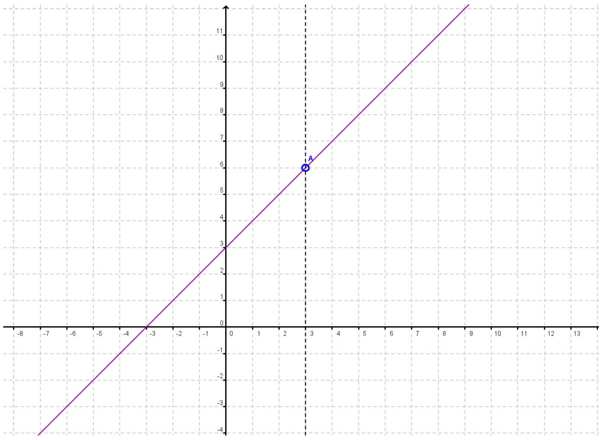
FUNZIONI CONTINUE E DISCONTINUE

ESEMPIO 3 - Consideriamo ora la funzione $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ **e calcoliamo f(3) e** $\lim_{x\to 3} f(x)$**:**

⇒ f(3) non si può calcolare perché x=3 non appartiene al dominio della funzione

⇒ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3} x+3=6$

Allora osserviamo che le due condizioni sono nuovamente diverse!!!



Allora possiamo concludere che:

Definizione:

Una funzione si dice **continua in un punto x_0** se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ed è uguale al valore della funzione calcolato in x_0:

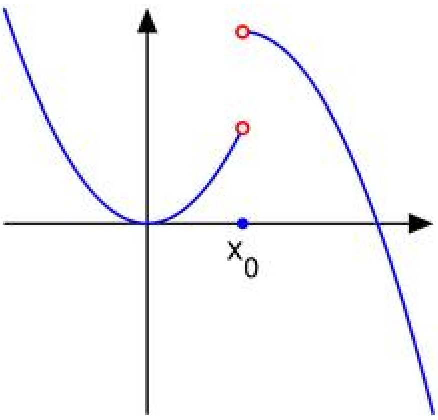
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Una funzione che non è continua in un punto x_0 si dice **DISCONTINUA** in x_0.

Ci sono 3 tipi di discontinuità in x_0, prima specie, seconda specie e terza specie (si differenziano per il comportamento della funzione in quel punto).

DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:



La funzione è evidentemente discontinua in x_0 infatti in tale punto essa “salta” da una y_1 a una y_2.

Si dice che la funzione fa un “salto”.

Ricordando che una funzione è continua se

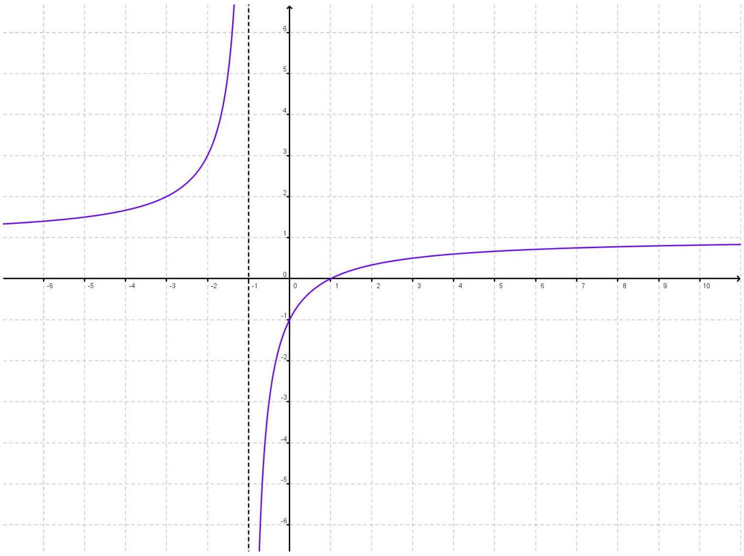
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

allora possiamo concludere che poiché in x_0 otteniamo 2 valori della y allora la funzione è **discontinua di PRIMA SPECIE.**

cc BY NC ND

DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:



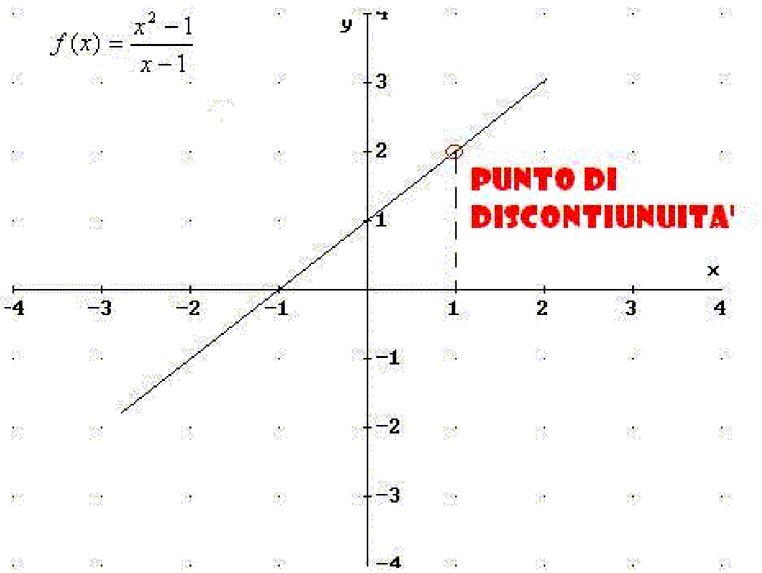
La funzione è evidentemente discontinua in x = -1; infatti in tale punto essa possiede un asintoto verticale e il suo dominio è: $\{\forall x \in R \ / \ x \neq -1\}$

Ciò significa che la funzione verifica la condizione: $\boxed{\lim_{x \to -1} f = \infty}$

Ma abbiamo detto che una funzione è continua in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora in x_0 = -1 la funzione è **discontinua di SECONDA SPECIE**.

DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:



Essa possiede un "buco" nel punto (1,2) poiché il suo dominio è $\{\forall x \in R \ / \ x \neq 1\}$, quindi f(1) non esiste.

Se calcoliamo il limite destro e il limite sinistro di questa funzione per x che tende a 1 notiamo che sono uguali cioè

$\lim_{x \to 1^-} f = 2$ e $\lim_{x \to 1^+} f = 2$

Ma ricordando che una funzione è continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora possiamo concludere dicendo che la funzione è **discontinua di TERZA SPECIE**.

CC BY NC ND