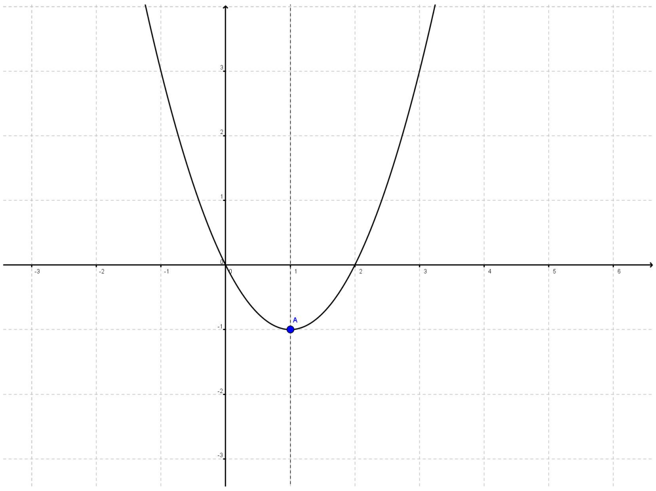
# FUNZIONI CONTINUE E DISCONTINUE

**ESEMPIO 1 - Consideriamo la funzione f(x) =** $x^2 - 2x$ **e calcoliamo f(1) e** $\lim_{x \to 1} f(x)$**:**

- ⇒ f(1) = $1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
- ⇒ $\lim_{x \to 1} x^2 - 2x = 1 - 2 = -1$

Possiamo osservare che f(1) = $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

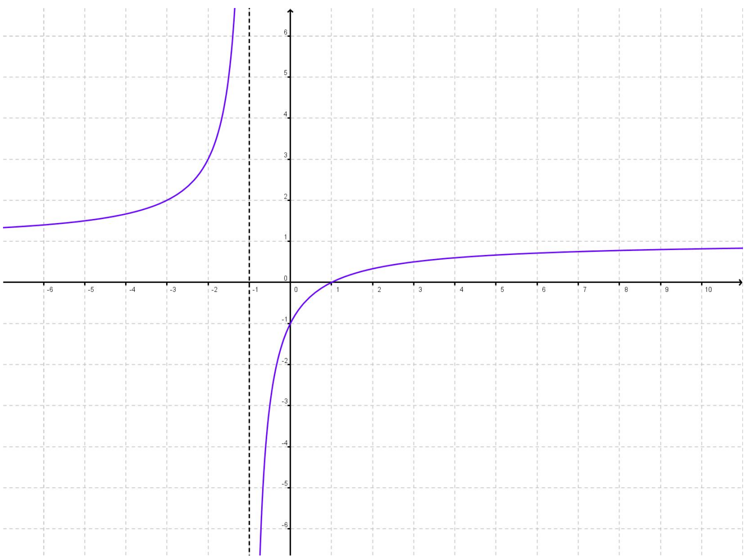


**QUESTO PERO' NON SEMPRE SUCCEDE. FACCIAMO ALTRI ESEMPI.**

**ESEMPIO 2 - Consideriamo ora la funzione** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ **e calcoliamo f(-1) e** $\lim_{x \to -1} f(x)$**:**

- ⇒ f(-1) non si può calcolare perché x=-1 non appartiene al dominio della funzione
- ⇒ $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

Allora possiamo osservare che le due condizioni non sono uguali!!!



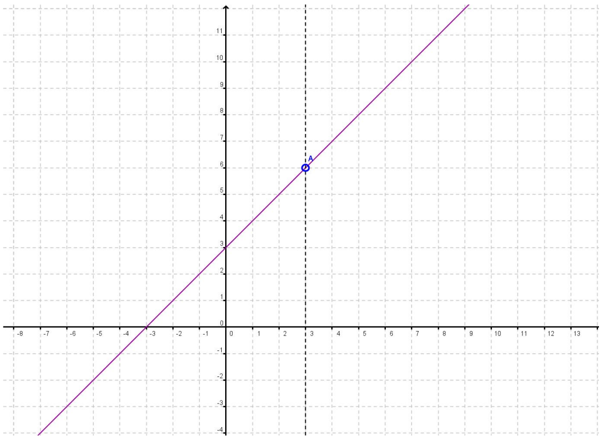
# FUNZIONI CONTINUE E DISCONTINUE

**ESEMPIO 3 - Consideriamo ora la funzione** $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ **e calcoliamo f(3) e** $\lim_{x\to 3} f(x)$**:**

$\Rightarrow$ f(3) non si può calcolare perché x=3 non appartiene al dominio della funzione

$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3} x+3=6$

Allora osserviamo che le due condizioni sono nuovamente diverse!!!



Allora possiamo concludere che:

**Definizione:**

Una funzione si dice **continua in un punto $x_0$** se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ed è uguale al valore della funzione calcolato in $x_0$:

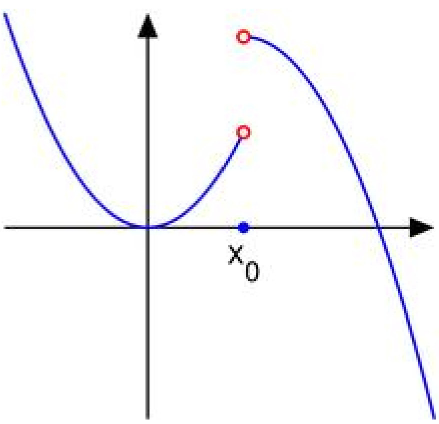
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Una funzione che non è continua in un punto $x_0$ si dice **DISCONTINUA** in $x_0$.

Ci sono 3 tipi di discontinuità in $x_0$, prima specie, seconda specie e terza specie (si differenziano per il comportamento della funzione in quel punto).

## DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:




La funzione è evidentemente discontinua in $x_0$ infatti in tale punto essa "salta" da una $y_1$ a una $y_2$.

**Si dice che la funzione fa un "salto".**

Ricordando che una funzione è continua se

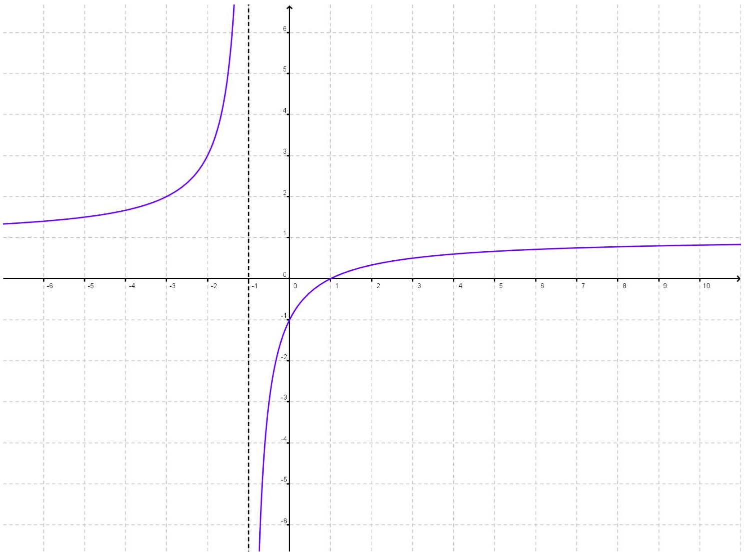
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

allora possiamo concludere che poiché in $x_0$ otteniamo 2 valori della y allora la funzione è **discontinua di PRIMA SPECIE.**

# FUNZIONI CONTINUE E DISCONTINUE

## DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:



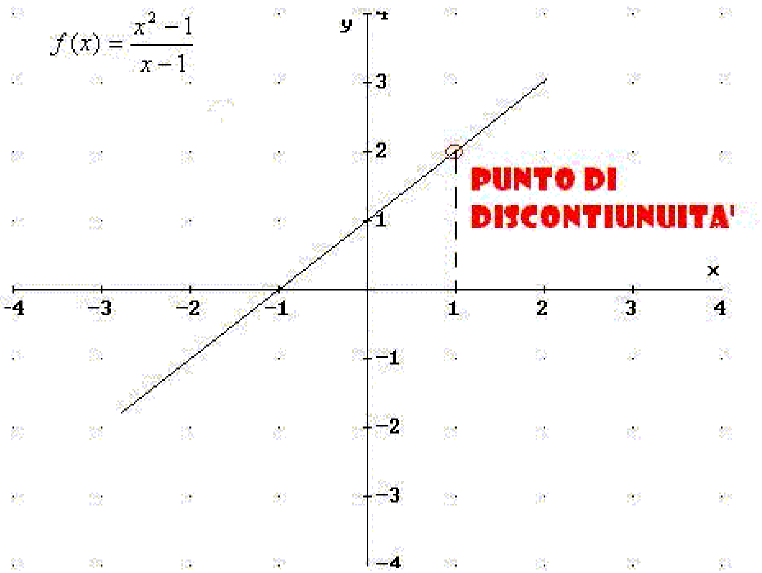
La funzione è evidentemente discontinua in x = -1; infatti in tale punto essa possiede un asintoto verticale e il suo dominio è: $\{\forall x \in R \,/\, x \neq -1\}$

Ciò significa che la funzione verifica la condizione: $\boxed{\lim_{x \to -1} f = \infty}$

Ma abbiamo detto che una funzione è continua in $x_0$ se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora in $x_0$ = -1 la funzione è **discontinua di SECONDA SPECIE**.

## DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE

Osserviamo la funzione rappresentata in figura:




Essa possiede un "buco" nel punto (1,2) poiché il suo dominio è $\{\forall x \in R \,/\, x \neq 1\}$, quindi f(1) non esiste.

Se calcoliamo il limite destro e il limite sinistro di questa funzione per x che tende a 1 notiamo che sono uguali cioè

$\lim_{x \to 1^-} f = 2$ e $\lim_{x \to 1^+} f = 2$

Ma ricordando che una funzione è continua in un punto $x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora possiamo concludere dicendo che la funzione è **discontinua di TERZA SPECIE**.