ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:	1. se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$; 2. se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$; 3. se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Sono definite:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right); \qquad 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}; \qquad 3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Non sono definite: $\left(-2^{\sqrt{3}}\right)$; 0^0 ; 0^{-3}.

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi(Z) valgono anche per esponenti reali (R):

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a $\mathbf{R}$ vale:

1. $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto **R** ; il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).
Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

Analizziamoli uno ad uno:

ESERCITAZIONE 1

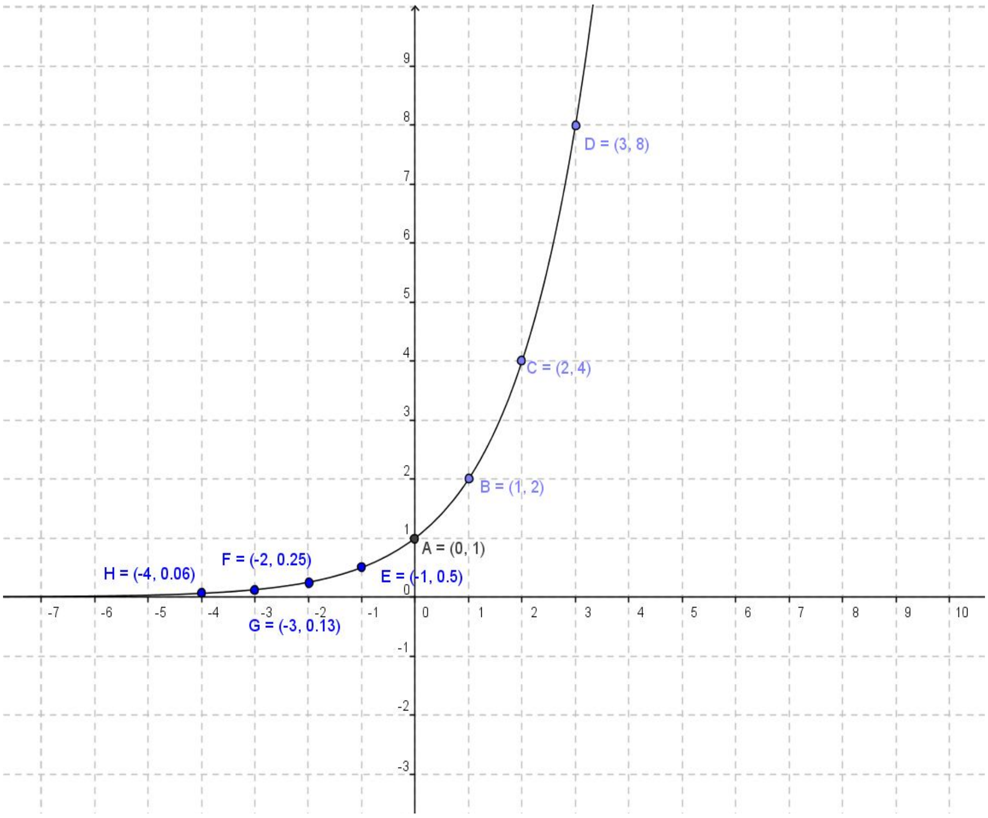
Costruiamo il grafico della funzione esponenziale $\boxed{y = a^x}$ quando la base e' maggiore di 1, esempio a = 2.

Quando la base e' maggiore di 1 tutte le curve ottenute con qualunque base hanno le stesse caratteristiche. La funzione diventa $\boxed{y = 2^x}$ a>1

Costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y;

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16

ora metto i punti trovati nel grafico; il punto (4,16) non e' stato messo



Quando la x cresce la y tende a valori sempre più grandi (quindi tende a infinito) allora la funzione si dice CRESCENTE.

Osservazione: se a = 1 , si ha: $y = a^x = 1^x = 1$ che è la funzione costante, rappresentata da una retta parallela all'asse x.

ESERCITAZIONE 2

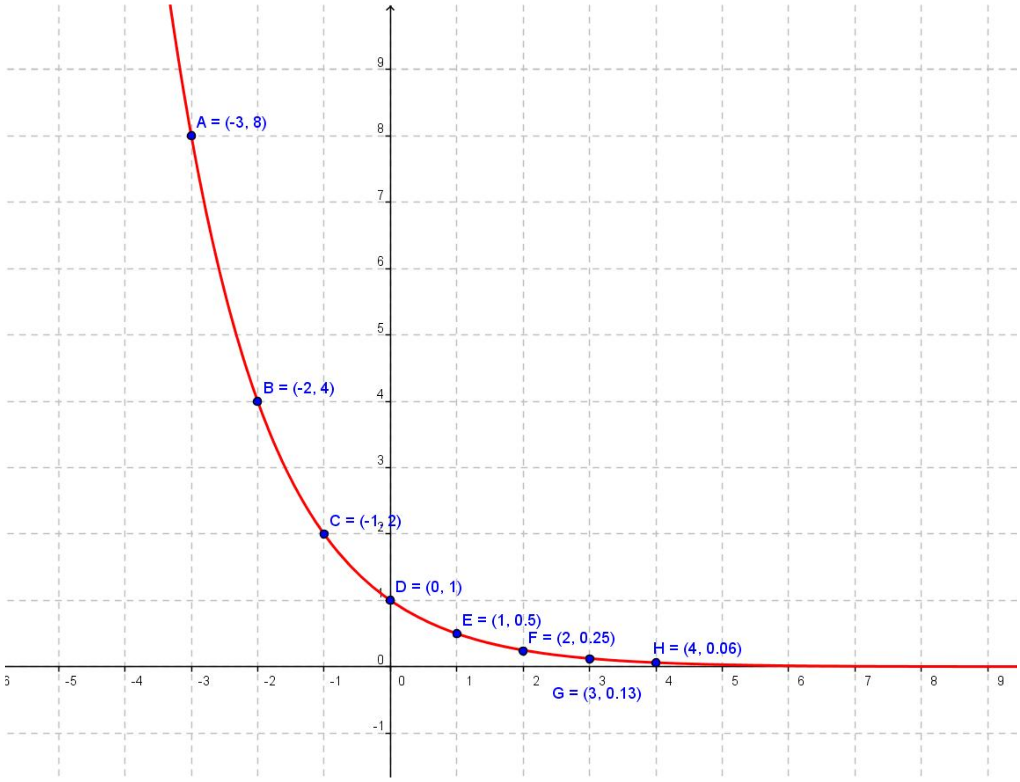
Costruiamo il grafico della funzione esponenziale $\boxed{y = a^x}$ quando la base e' compresa tra 0 ed 1, esempio a = ½.

Voglio costruire il grafico della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ $0<a<1$

Costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y;

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16

ora metto i punti trovati in un grafico il punto (-4,16) non e' stato messo



Quando la x cresce la y decresce (quindi tende a zero) allora la funzione si dice DECRESCENTE.

Se uniamo i due grafici notiamo che sono SIMMETRICI rispetto all'asse delle y.

Questi grafici sono alla base della risoluzione di equazioni esponenziali.

UN PO' DI STORIA…

La funzione esponenziale con base "e" è una f con base speciale che si chiama numero di NEPERO e vale 2,718281… (è un numero irrazionale).

Una proprietà importante di questa funzione è che la tangente alla curva nel punto (0;1) è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, avendo equazione

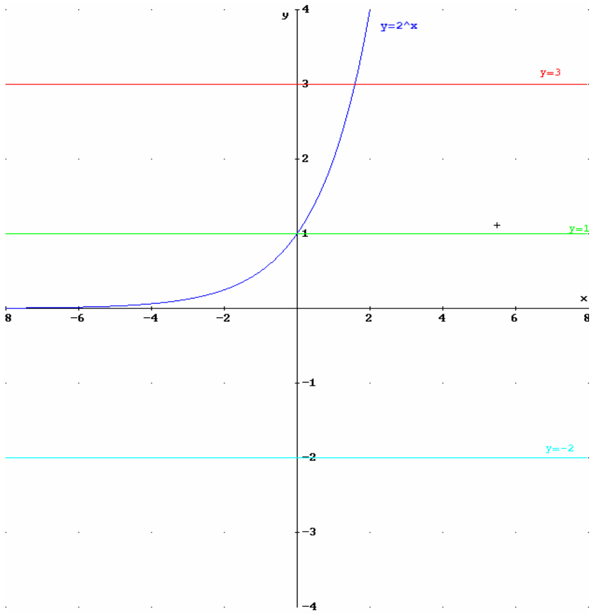
$y = x+1$

*Un'equazione si dice **esponenziale** quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.*

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b \ , \ \text{con } a > 0 \ \text{ e } \ b > 0 \ ; \ x \ \text{è l' incognita dell' equazione}.$$

QUANTE SOLUZIONI AMMETTE?
Per rispondere a tale domanda, osserviamo che graficamente, risolvere un'equazione equivale a determinare, se esiste, l'ascissa del punto di intersezione tra il grafico della funzione esponenziale e la retta y = b.



Notiamo allora che esiste sempre UNA SOLA soluzione, tranne che per valori di b **minori o uguali a zero**!!!

RIASSUMENDO

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere:

- ***impossibile*** se $b \le 0$, oppure $b \ne 1$ e $a = 1$; esempio : $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- ***indeterminata*** se $a = 1, \ b = 1$; esempio : $1^x = 1$;
- ***determinata*** se $a > 0, \ a \ne 1, \ b > 0$; esempio : $3^x = 5$.

PER RISOLVERE LE EQUAZIONI ESPONENZIALI DISTINGUIAMO:

- **EQUAZIONI IN CUI SI POSSONO UGUAGLIANZE LE BASI**
  (utilizzando le proprietà delle potenze)

1. Risolviamo l'equazione: $8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16$

   Osserviamo che: $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ e $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$.

   Quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

   $$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3$$

   La soluzione dell'equazione data è quindi $x = 3$.

- **EQUAZIONI RIDUCIBILI AD EQUAZIONI ALGEBRICHE RICORRENDO AD UN INCOGNITA SUPPLEMENTARE**

2. Risolviamo l'equazione: $2^x + 2^{3-x} = 6$

   Osserviamo che:

   $$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}.$$

   L'equazione assegnata è equivalente a:

   $$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:

$$\left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x. Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria $z = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado) si ha:

$2^x = 2$ oppure $2^x = 4$ da cui: $x = 1$ oppure $x = 2$

- **ALTRI TIPI DI ESPONENZIALI:** **$a^{f(x)} = b^{g(x)}$ dove $a \neq b$**

Per risolverle è necessario uno strumento nuovo, il LOGARITMO che vedremo subito dopo la trattazione delle esponenziali.

ADESSO PROVA TU!!

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

   a) $3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

   b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

   a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0.25}$;

   b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\quad \sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

   a) $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

   b) $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right]$

   c) $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\quad \left[\frac{5}{6}\right]$

   d) $4^x = 2^x - 2$ $\quad [\varnothing]$

   e) $3^x + 3^{1-x} = 4$ $\quad [0; 1]$

   f) $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$ $\quad [-1; 2]$

LOGARITMI

Si chiama **logaritmo in base *a* di *b*** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale

$$a^{x} = b$$

$$\Updownarrow$$

$$x = log_{a} b$$

a = *base dell'eponenziale e del logaritmo*

elementare quando a è diverso da b, cioè l'esponente *x* da assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b* .

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se *a* e *b* non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi : $2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = log_2 3$.

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base *a*>0 deve essere *b*>0 , inoltre valgono i casi particolari:

$$\boxed{log_a 1 = 0 \text{, poichè } a^0 = 1;\ log_a a = 1,\ \text{poichè } a^1 = a.}$$

Analogamente alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti **proprietà dei logaritmi**:

1)	$\log_a x^y = y \cdot \log x$	$(x \in \mathbf{R}^+ \ ;\ y \in \mathbf{R},\ a > 0)$;
2)	$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$	$(x \in \mathbf{R}^+ \ ;\ y \in \mathbf{R}^+, a > 0)$;
3)	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$(x \in \mathbf{R}^+ \ ;\ y \in \mathbf{R}^+, a > 0)$;
4)	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$	$(a, b, c > 0)$; formula di cambiamento di base nei logaritmi .

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2{,}718$: $log\, x$ indica il $log_{10} x$, detto anche *logaritmo decimale*; $ln\, x$, indica il $log_e x$, detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

Funzione logaritmica

Si chiama ***funzione logaritmica*** ogni funzione del tipo :

$y = log_a\, x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato,} \quad x \in \mathbf{R}^+.$

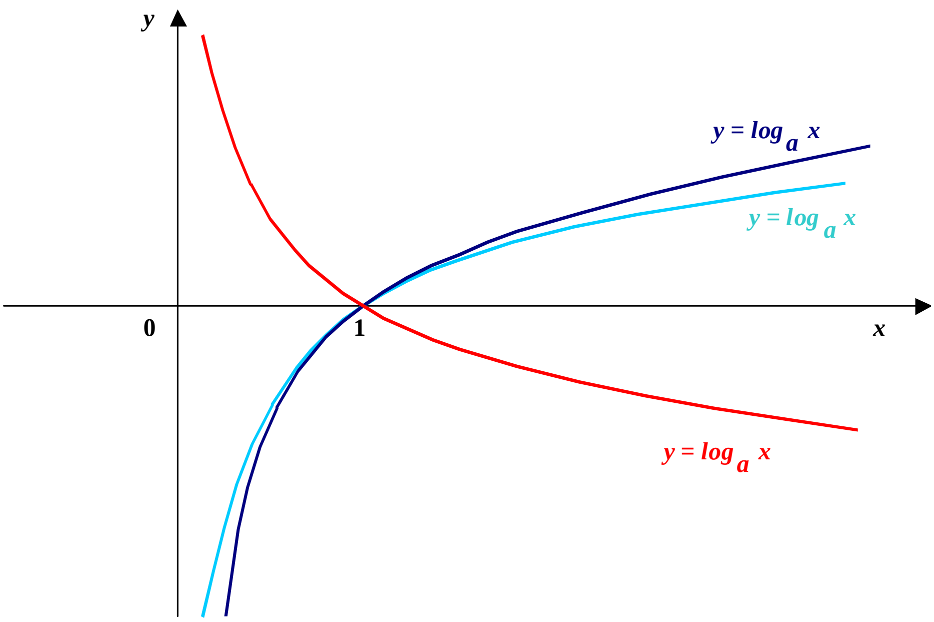
La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a *x* è $\mathbf{R}^+$;
il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è **R** .

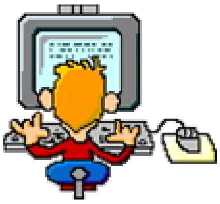
Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $\boxed{x > y \Rightarrow log_a\, x > log_a\, y\ ;}$
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $\boxed{x > y \Rightarrow log_a\, x < log_a\, y\ ;}$

I grafici della **funzione logaritmica** si ottengono da quelli della **funzione esponenziale** per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



$0 < a < 1$; $a > 1$; $a > 1$; $a > a$



IN LABORATORIO CON EXCEL

COSTRUISCI PER PUNTI I GRAFICI DELLE SEGUENTI FUNZIONI E OSSERVA…

1. $y = \log_2 x$ e 2. $y = 2^x$

SUGGERIMENTI:

1. **Costruisci due tabelle di valori una per la f esponenziale e una logaritmica;**
2. **osserviamo che………….**
3. **rappresentale graficamente**

COME VARIA IL GRAFICO DELLA FUNZIONE LOGARITMICA AL VARIARE DELLA BASE:

1. $y = \log_2 x$, $a=2>1$

a) **il grafico è contenuto nel _________ ___________,**
b) **la funzione passa per ____________________________________**
c) **per valori di x sempre più piccoli ($x \rightarrow 0$)_______________ ; asse y è un ASINTOTO VERTICALE!**
d) **Per valori di x sempre più grandi ($x \rightarrow +\infty$) _________________________; la funzione è sempre ________________**

DEF. Una f è crescente se presi $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

2. $y = \log_{1/2} x$, $0<1/2<1$

a) **il grafico è contenuto nel ____________**
b) **la funzione passa per ____________________________________**
c) **per valori di x sempre più piccoli ($x \rightarrow 0$)_______________ asse y è un ASINTOTO VERTICALE**
d) **Per valori di x sempre più grandi ($x \rightarrow +\infty$) _________________________;**

DEF. Una f è decrescente se presi $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Se uniamo i due grafici notiamo che sono SIMMETRICI rispetto all'asse delle x.(vedi figura in alto rossa e azzurra)

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice ***logaritmica*** quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$log_a x = b \;\; , \text{ con } a > 0 \text{ e } b \in \mathbf{R} \; ; \; x > 0 \text{ è l' incognita dell' equazione .}$$

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è :

$$x = a^b$$

<u>Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:</u>

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $log_a A(x) = log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi ;
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di *x* calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione: $5 \cdot 3^x = 7$

Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

$$log\left(5 \cdot 3^x\right) = log\,7\ .$$

Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi: $log\,5 + log\,3^x = log\,7$.

Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi: $log\,5 + x \cdot log\,3 = log\,7$.

Isolando x otteniamo: $x = \dfrac{log\,7 - log\,5}{log\,3}$.

2. Risolviamo l'equazione logaritmica: $log_3(x+1) - log_3(x-2) = log_3 x - 2$.

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$$

cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $\boxed{2 = log_3 3^2}$: $log_3\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = log_3\left(\dfrac{x}{3^2}\right)$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}\ .$$

Il valore $x = \dfrac{11-\sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11+\sqrt{157}}{2}.$$

ADESSO PROVA TU!!

1. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $log_2(x-1)=3$ $[9]$

b) $log(x-2)+log\,5=log\,x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

c) $log(x-2)-log(x-1)=log\,5$ $[\varnothing]$

d) $2\cdot log_2\,x=2+log_2(x+3)$ $[6]$

e) $log(x-1)-2\cdot log(x+1)-log\,8=-2$ $\left[\frac{3}{2};9\right]$

f) $log_3(x-1)=\frac{1}{2}log_3\,x$ $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

SOLUZIONI:

a) C.E. x-1>0 --> x>1

$3=\log_2 2^3$ quindi: x-1=8 x=9.

b) C.E. x-2>0 → x>2 , x>0 soluz. x>2

$\log(x-2)-\log x=-\log 5$

$\log\frac{x-2}{x}=\log 5^{-1}$

$\frac{x-2}{x}=\frac{1}{5}$ $5x-x=10$ $x=\frac{5}{2}$

c) C.E. x>2

$\log\frac{x-2}{x-1}=\log 5$

$\frac{x-2}{x-1}=5$ $x=\frac{3}{4}$ nessuna soluzione, perché ¾ è <2.

d) C.E. x>0

$\log_2 x^2-\log_2(x+3)=\log_2 2^2$

$\frac{x^2}{x+3}=4$ $x^2-4x-12=0$ *da cui* $x=-2$ *NA* *e* $x=6$ *soluzione*

e) C.E. x>1

$$\log(x-1)-\log(x+1)^2=\log 8-\log 10^2$$
$$\log\frac{x-1}{(x+1)^2}=\log\frac{8}{100}$$
$$\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{2}{25} \qquad 2x^2-21x+27=0 \qquad x=\frac{3}{2} \quad e \quad x=9 \ \textit{soluzioni}$$

f) C.E. $x>1$

$$\log_3(x-1)=\log_3 x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \log_3(x-1)-\log_3 x^{\frac{1}{2}}=0 \quad , \quad \log_3(x-1)-\log_3 x^{\frac{1}{2}}=\log_3 1$$
$$\log_3\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}=\log_3 1, \qquad \frac{x-1}{\sqrt{x}}=1 \qquad x-1=\sqrt{x}, \qquad (x-1)^2=x \qquad x^2-3x+1=0$$
$$\textit{da cui} \quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \textit{ma } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \textit{NAcc} \qquad \textit{quindi} \qquad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \textit{soluzione}$$