LIMIDI DI FUNZIONI

Concetto intuitivo di limite di una funzione

I limiti di funzioni sono valori a cui le funzioni si avvicinano in certi punti particolari, ossia in punti in cui non è possibile definire le funzioni stesse (punti esclusi dal dominio). Non si riesce a conoscere il comportamento delle funzioni in quei punti ma si può sapere il loro comportamento limite, cioè come esse si comportano quando ci si avvicina il più possibile a quel valore. Per capire cosa s' intende allora per "limite di una funzione" analizziamo alcuni esempi in cui cominciamo a familiarizzare con la nozione di limite da un punto di vista intuitivo.

ESEMPIO 1 - LIMITE FINITO QUANDO x TENDE AD UN VALORE FINITO

Consideriamo la funzione $\boxed{y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}}$ e studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più prossimi al numero 3.

Osserviamo che la funzione non è definita per x=3, tuttavia possiamo calcolare i valori di y per valori di x "vicini" a 3. Ad esempio se a x attribuiamo i valori riportati nella seguente tabella, osserviamo che:

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
y	5.9	5.99	5.999	Non definita	6.001	6.01	6.1

---→ 6 ←------------------------------------

Possiamo osservare che quando x si avvicina a 3, sia da sinistra che da destra, i valori corrispondenti di y si avvicinano sempre più a 6.

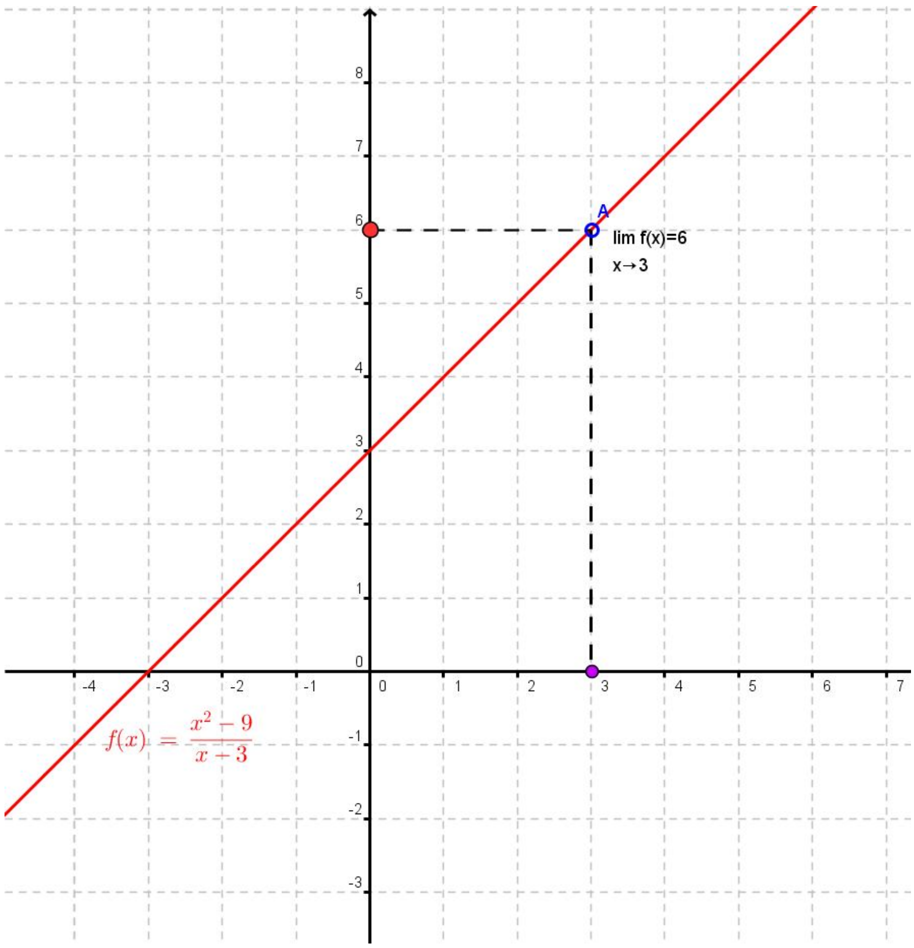
Allora per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore x=3 scriviamo: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ che si legge: " il limite per x che tende a 3 della funzione f(x) è uguale a 6".

LIMIDI DI FUNZIONI

GRAFICAMENTE:

Dopo aver disegnato la funzione nel piano cartesiano ci accorgiamo che il grafico della funzione è una retta privata del suo punto di ascissa 3!

$$\boxed{y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \quad per \quad x \neq 3}$$



ESEMPIO 2 - LIMITE INFINITO QUANDO x TENDE AD UN VALORE FINITO

Consideriamo la funzione $\boxed{y = \frac{x+4}{x-3}}$ e studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più prossimi al numero 3.

Osserviamo che la funzione non è definita per x=3, tuttavia possiamo calcolare i valori di y per valori di x "vicini" a 3. Ad esempio se a x attribuiamo i valori riportati nella seguente tabella, osserviamo che:

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
y	-69	-699	-6999	Non definita	7001	701	71

----------------------→ $-\infty$ $+\infty$ ←----------------------

Possiamo osservare che quando x si avvicina a 3, da sinistra, i valori corrispondenti di y si allontanano sempre di più dall'origine fino a "meno infinito"; quando x si avvicina a 3, da destra, i valori corrispondenti di y diventano sempre più grandi cioè tendono a "più infinito".

Allora per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore x=3 scriviamo:

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ che si legge: " il limite per x che tende a 3 da sinistra della funzione f(x) è uguale a $-\infty$ "

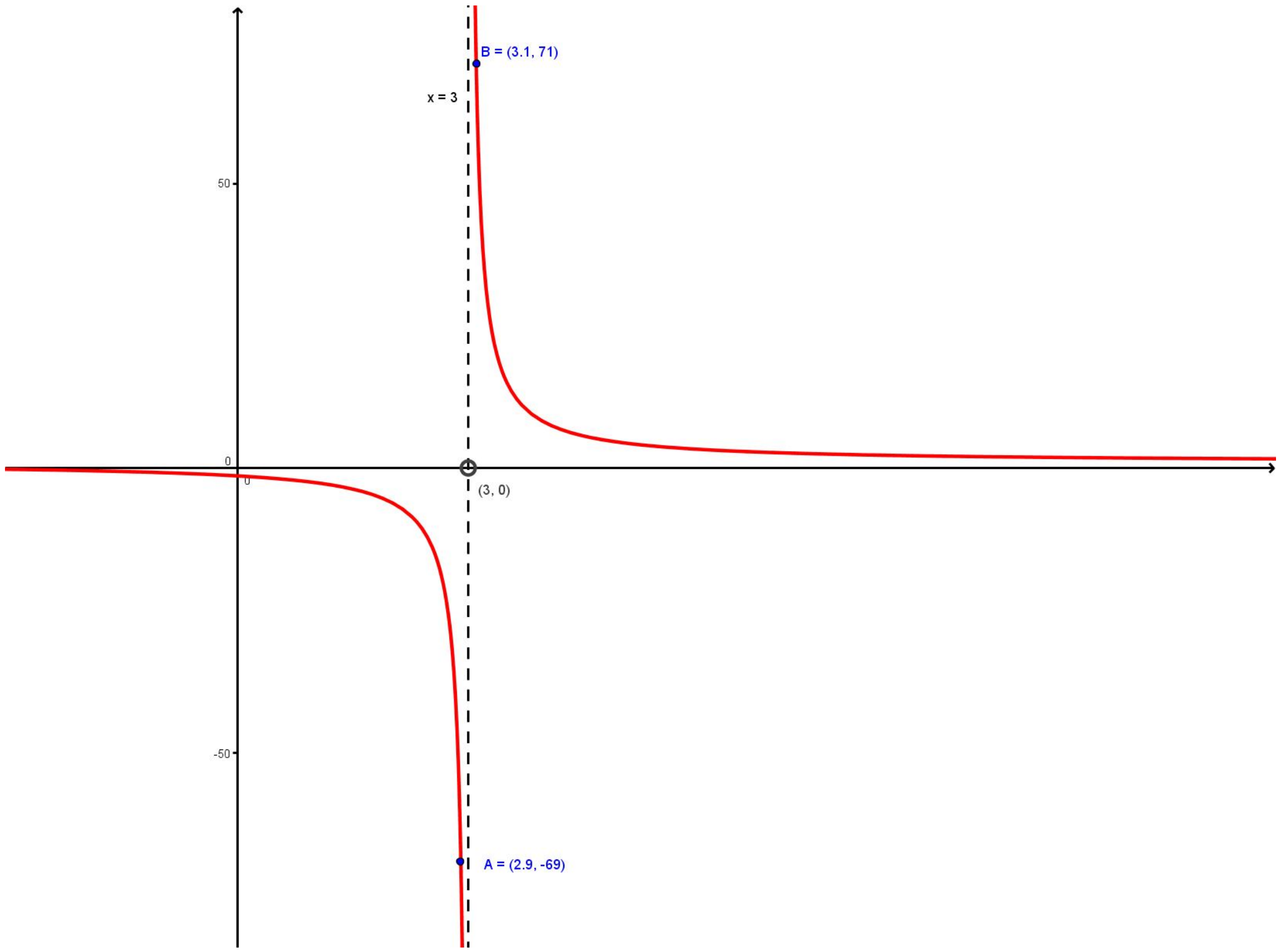
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ che si legge: " il limite per x che tende a 3 da destra della funzione f(x) è uguale a $+\infty$ "

REGOLA
Quando il risultato di almeno un limite, calcolato nel punto escluso x_0, è uguale a infinito allora la retta $x=x_0$ è un **ASINTOTO VERTICALE** della funzione.

Quindi un asintoto è una retta a cui la funzione si avvicina indefinitamente ma non la tocca!

GRAFICAMENTE:

La funzione $y = \dfrac{x+4}{x-3}$ nel piano cartesiano è la seguente:



-------------------------→ ←-----------------------------------

ci accorgiamo che la curva, sia da sinistra che da destra, si avvicina alla retta x=3 (QUINDI **E' UN ASINTOTO VERTICALE**) ma non la tocca (NON SI POTRA' MAI OLTREPASSARE)!!!

ESEMPIO 3 - LIMITE FINITO QUANDO x TENDE A INFINITO

Consideriamo la funzione $\boxed{y = \frac{x-1}{x+1}}$ e studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi. Se attribuiamo ad x i valori 100, 200, 300, 400, 500, 1000, 10000 ... indicati in tabella e con una calcolatrice calcoliamo le y corrispondenti osserviamo che:

x	100	200	300	400	500	1000	10000
y	0.9802	0.99	0.9934	0.995	0.996	0.998	0.9998

---→ **1**

quando la x assume valori positivi sempre più grandi (e si dice tendenti a più infinito) i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 1.
Allora per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ che si legge: " il limite per x che tende a più infinito della funzione f(x) è uguale a 1".

Se attribuiamo ad x i valori -100, -200, -300, -400, -500, -1000, -10000 ... indicati in tabella e con una calcolatrice calcoliamo le y corrispondenti osserviamo che:

x	-100	-200	-300	-400	-500	-1000	-10000
y	1.0202	1.0101	1.0067	1.005	1.004	1.002	1.0002

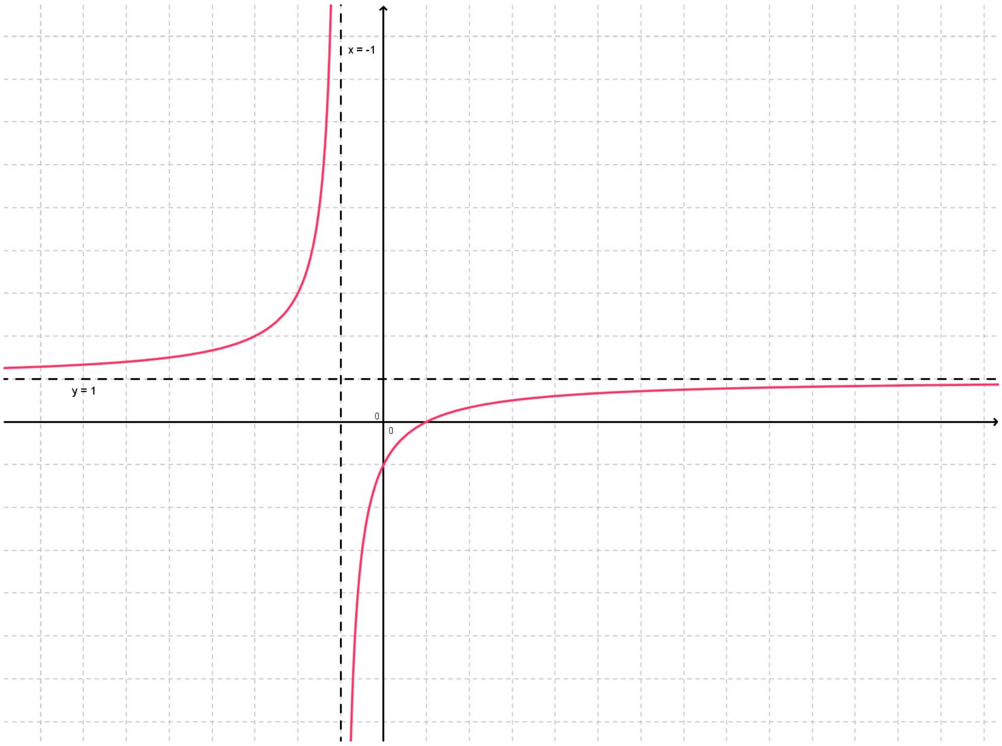
---→ **1**

quando la x assume valori negativi sempre più piccoli (e si dice tendenti a meno infinito) i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 1.
Allora per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ che si legge: " il limite per x che tende a meno infinito della funzione f(x) è uguale a 1".

REGOLA
Quando il risultato del limite, calcolato all'infinito, è uguale a un numero "t" allora la retta y=t è un **ASINTOTO ORIZZONTALE** della funzione.

GRAFICAMENTE



In tal caso, si dice che la funzione presenta la retta y = 1 come asintoto orizzontale.

FORME INDETERMINATE

I limiti si possono presentare anche nelle seguenti forme $\frac{\infty}{\infty}$ (infinito su infinito) oppure $\frac{0}{0}$ (zero su zero) che si chiamano *forme indeterminate*. Per risolvere tali forme indeterminate si seguono delle regole.

REGOLA $\frac{\infty}{\infty}$ = per eliminare tale forma indeterminata si raccoglie il termine di grado massimo sia al numeratore che al denominatore, poi si semplifica tutto ciò che è possibile ed infine si eliminano i termini che hanno la x al denominatore (ricordandomi che un numero fratto infinito è sempre uguale a zero: $\frac{n}{\infty} = 0$).

REGOLA $\frac{0}{0}$ = per eliminare tale forma indeterminata si scompongono in fattori primi sia il numeratore che il denominatore e poi si semplifica tutto ciò che è possibile.